

Beata Łubianka

Katedra Psychologii Różnic Indywidualnych
Instytut Psychologii KUL

WOKÓŁ UZDOLNIEŃ MATEMATYCZNYCH – PRZEGLĄD BADAŃ

1. Wprowadzenie

Celem artykułu jest próba systematyzacji wiedzy dotyczącej problematyki uzdolnień matematycznych. Systematyzacja wiedzy została oparta o przegląd psychologicznej literatury polskiej i anglojęzycznej opublikowanej w przedziale czasowym 1960-2006. Wieloaspektowy przegląd literatury przedmiotu dokonany został celem przybliżenia czytelnikowi złożonej tematyki zdolności matematycznych oraz prezentacji dotychczasowego stanu badań na ten temat. Zagadnienie uzdolnień matematycznych zostało omówione pod kątem definicji, kierunków badań, struktury, pomiaru oraz czynników warunkujących poziom uzdolnień matematycznych. Wymienione aspekty uporządkowane zostały w kolejne części artykułu. Wielowymiarowe potraktowanie wyżej wymienionych kwestii pozwala na zapoznanie się, w aspekcie teoretycznym, z ciekawą, choć złożoną problematyką uzdolnień matematycznych. Natomiast w płaszczyźnie praktycznej pozwala, szczególnie psychologom, pedagogom oraz nauczycielom matematyki na skorzystanie z wniosków płynących z przeglądu badań, a mających zastosowanie w pracy z dziećmi i młodzieżą szkolną o zróżnicowanym poziomie uzdolnień matematycznych.

Tematyka zdolności matematycznych w literaturze psychologicznej obecna jest od pierwszych lat XX wieku, odkąd tylko naukowcy rozpoczęli badania i dyskusję nad modelami inteligencji oraz specyfiką uzdolnień ogólnych i specjalnych. Uzdolnienia matematyczne wyodrębniane są spośród uzdolnień specjalnych, które wchodziły w skład struktury zdolności człowieka (Hornowski 1986).

Analizując problematykę zdolności matematycznych warto wpierw dokonać krótkiej refleksji nad samą nauką, jaką jest matematyka i aktywnością związaną z przyswajaniem wiedzy z tej dziedziny. Gauss twierdzi, iż istotą matematyki jest poszukiwanie rygorystycznej ścisłości dowodowej (Kline 1977). Tym samym matematyka jawi się nie tylko uczniom, jako wyjątkowo zalgorytmizowana dyscyplina nauki. A wszakże obszar matematyki nie jest zarezerwowany tylko dla schematyzmu i odtwórczości. To teren wyjątkowych i twórczych prac, fascynującego geniuszu myśli, niepospolitych i barwnych osobowości naukowców, odkryć, które stanowią motor napędowy dla rozwoju całej nauki (Davis, Hersch 1994; Sękowski 1996). Jak zauważa Koziński (1999) odkrycia najwybitniejszych matematyków przekraczają granice kultury, historii i czasu, dokonując tym samym transgresji o wymiarze historycznym; rozwijają kulturę, kształtują całe społeczeństwa i bezpośrednio wpływają na losy pojedynczych ludzi.

Matematyka, tuż obok fizyki i chemii wpisana jest w świat nauk ścisłych. Jednak, co ciekawe, jak podaje Jaśko (1992), badania pokazują, iż uzdolnienia matematyczne nie korelują dodatnio z uzdolnieniami chemicznymi czy fizycznymi. Owo zaskakujące twierdzenie nie jest bynajmniej artefaktem, lecz wynika z ograniczonego sposobu definiowania zdolności matematycznych poprzez zawężenia ich tylko do operacji typowo arytmetycznych. Niemniej jednak, świat nauk ścisłych wymaga abstrakcyjnego i dedukcyjnego myślenia, tworząc tym samym barierę zrozumienia, którą tylko nieliczni przekraczają. Idee matematyczne, prawdy fizyczne, prawa chemiczne ze względu na swą hermetyczność i dominację kultury literackiej nie zawsze trafiają do masowej wyobraźni i wiedzy (Koziński 1999). Swoistość matematyki i jej formalny charakter uzależniony jest od hermetycznego języka, którym operuje ta dziedzina nauki. W matematyce posługujemy się symbolami symboli, zatem język matematyki jest abstrakcją wyższego rzędu, aniżeli język innych nauk. Poszczególne działy matematyki w stosunku do poprzednich nie tylko poruszają nowe zagadnienia, ale też zmieniają stosowany język na bardziej abstrakcyjny i skondensowany (Kotlarski 1990a). Warto również zaznaczyć, że większość psychologicznych badań dotyczących uzdolnień matematycznych odnosi się do szkolnych uzdolnień matematycznych uczniów (Dąbek 1984; Krupa 1986, 1987; Kotlarski 1990a, 1995; Gawda 1996), którzy ucząc się przedmiotu pod nazwą „matematyka”, poznają szkolną wiedzę, będącą odbiciem różnych gałęzi matematyki jako nauki: twierdzenie Pitagorasa, schemat Bernoulliego, wzory Viete’a, prawa de Morgana, symbol Newtona, algebra i analiza, geometria, prawdopodobieństwo i statystyka (Cewe, Nahorska, Pancer 2001). Dlaczego, mówiąc obrazowo, wyżej wymienione zagadnienia niektórym osobom spędzają sen z powiek, a dla innych są proste, oczywiste i nie nastrożające żadnych trudności? Odpowiedź na to pytanie niesie ze sobą między innymi przegląd wyników badań dotyczących analizy struktury uzdol-

nień matematycznych, pomiaru uzdolnień oraz czynników oddziałujących na poziom uzdolnień matematycznych. Opis tych zagadnień podejmuję w kolejnych częściach niniejszego artykułu.

2. Uzdolnienia matematyczne – próba definicji

Definiowanie uzdolnień matematycznych to nierozstrzygnięty problem w omawianym kręgu tematycznym. Uzdolnienia matematyczne można określić jako swoiste właściwości percepcji, myślenia i pamięci, które przejawiają się na materiale liczb i symboli. Przegląd literatury przedmiotu pokazuje, iż w historii badań nad uzdolnieniami matematycznymi pojawiają się dwa sposoby definiowania uzdolnień matematycznych.

Pierwszy, strukturalny, obejmuje grupę definicji skoncentrowanych na elementach składowych uzdolnień matematycznych i wynikającej z nich strukturze uzdolnień. Przykładem tego typu definicji jest definicja Krutieckiego (1971), w której pisze, iż uzdolnienia matematyczne charakteryzuje uogólnione, zredukowane i plastyczne myślenie w zakresie stosunków matematycznych, symboli i oznaczeń matematycznych oraz matematyczny typ myślenia.

Druga grupa definicji uzdolnień matematycznych zwraca uwagę na funkcjonalny charakter uzdolnień. Rican (1964 – za: Kość 1982) określa uzdolnienia matematyczne jako dyspozycje, które stanowią warunek pomyślnego uczenia się i uzyskiwania osiągnięć w matematyce. Kość (1982) uważa, iż uzdolnienia matematyczne umożliwiają opanowanie specyficznego systemu symboli matematycznych i sprawne operowanie nimi, szczególnie w procesie rozwiązywania problemów matematycznych. Druga grupa definicji w pełniejszy sposób oddaje naturę uzdolnień matematycznych, zakładając, iż każde uzdolnienie, niezależnie od elementów tworzących ich strukturę, jest uzdolnieniem do czegoś.

Na uwagę zasługuje także definicja uzdolnień matematycznych podana przez Krupę. Badacz ten kierując się specyfiką własnych badań oraz łącząc strukturalny i funkcjonalny aspekt definicji uzdolnień matematycznych, a także odwołując się do poglądów Krutieckiego podaje, iż uzdolnienia matematyczne charakteryzuje uogólnione, zredukowane i plastyczne myślenie w zakresie stosunków matematycznych, symboli i oznaczeń matematycznych oraz matematyczny typ myślenia, dzięki czemu możliwe jest opanowanie (uczenie się) matematyki na określonym poziomie programu szkolnego oraz szybkie i skuteczne opanowanie konkretnych wiadomości, umiejętności, nawyków (Krupa 1987).

Krutiecki (1968 – za: Gawda 1996) wyróżnia dwa rodzaje uzdolnień matematycznych: produktywny i nieproduktywny. Typ produktywny zwany także

heurystycznym pozwala na formułowanie oryginalnych praw i znajdowanie nowych rozwiązań. W tym ujęciu zdolności matematyczne nabierają charakteru uzdolnień twórczych, odzwierciedlających nowe i niestereotypowe rozwiązywanie matematycznych problemów. Natomiast typ nieproduktywny, algorytmiczny, związany jest z opanowaniem znanych schematów rozwiązań, postępowaniem według z góry ustalonych zasad i reguł rozwiązań. Nosal (1974) natomiast mówi o dwóch stylach myślenia matematycznego: algebraicznym i geometrycznym. Algebraiczny wiąże się z myśleniem symultanicznym, skoncentrowanym na liczbach. Natomiast myślenie geometryczne, to myślenie obrazowe.

3. Kierunki badań nad uzdolnieniami matematycznymi

Przegląd literatury psychologicznej dotyczącej specyfiki uzdolnień matematycznych wskazuje, iż problematyka ta posiada różnorodne ujęcia. Złożoność tematyki wyznacza i wymaga wieloaspektowego zaprezentowania charakterystyki kierunków badań nad uzdolnieniami matematycznymi. Warto zaznaczyć również, iż mimo liczego przywoływania w treści artykułu wyników badań różnych autorów, to problematyką analizy uzdolnień matematycznych, jako wiodącą domeną swej badawczej pracy zajmuje się niewielu uczonych (por. Kennedy 1960; Hadamard 1964; Krutiecki 1971; Kość 1982; Dąbek 1984; Kotlarski 1990a, 1995; Lubinski, Webb, Morelock, Benbow 2001). Znaczna ilość prac na temat uzdolnień matematycznych powstaje, jako wynik wniosków formułowanych przy okazji innych badań. Autorzy włączają problematykę uzdolnień matematycznych w krąg swych działań badawczych nie czyniąc z niej głównego pola swych rozważań (por. Panek 1977, Borzym 1983, Hornowski 1986, Tyszkowa 1990, Popek 1992, Gawda 1996, Wrona 2004).

Ogólnie Dąbek (1984) i Kotlarski (1990a) wyróżniają dwa główne kierunki badań nad uzdolnieniami matematycznymi:

Pierwszy kierunek zajmuje się analizą procesu twórczego i osiągnięciami wybitnych matematyków. Jego przedstawicielami są zazwyczaj sami matematycy. Przedmiotem ich analiz są refleksje i spostrzeżenia nad przebiegiem procesu odkryć matematycznych u siebie samych (Hadamard 1964) lub u innych matematyków (Kozielecki 1999) a także określenie roli i miejsca matematyki w historii rozwoju nauki i kultury (Davis, Hersh 1994; Sękowski 1996). Hadamard (1964), analizując proces swej pracy twórczej zwraca szczególną uwagę na intuicję, nieświadomą pracę umysłu oraz moment iluminacji, w którym następuje rozwiązanie problemu. Podkreśla także rolę uczuć estetycznych, poczucia piękna i elegancji, matematycznej harmonii liczb i kształtów. Podkreśla również dużą rolę przypadku w odkryciach matematycznych,

niezwykłą oryginalność myślenia, wrażliwość na problemy, giętkość myślenia oraz łatwość w porzucaniu błędnych dróg rozumowania i poszukiwanie jak najprostszych rozwiązań. Natomiast Kozielecki (1999) prezentując styl pracy Stefana Banacha – wybitnego polskiego matematyka, zwraca uwagę na silną motywację wewnętrzną, intensywną pracę nie dla korzyści materialnych, ale powodowaną ciekawością świata, radością płynącą z odkrywania prawd matematycznych, samego poszukiwania kierunku rozumowania, poszukiwania nowych pomysłów, przełamywania błędnych schematów myślowych i uogólniania odległych faktów. Powyższe analizy lokują się w kontekście elitarnego ujmowania twórczości (por. Nęcka 2002). Perspektywa odkrywania tajemnic przebiegu procesu twórczych odkryć wielkich matematyków przybliży nie-matematykom styl i sposób pracy twórców. Wiedza ta może posłużyć w kształtowaniu i rozwijaniu w sobie umiejętności pomagających w podnoszeniu własnego poziomu uzdolnień matematycznych.

Drugi kierunek badań koncentruje się przede wszystkim na poznawaniu charakteru uzdolnień matematycznych od strony ich struktury oraz różnorodnych czynników oddziałujących na ich poziom. Kierunek ten reprezentowany jest najczęściej przez psychologów, pedagogów, metodyków i matematyków praktyków. Analizie podlegają przede wszystkim szkolne uzdolnienia matematyczne. Tym samym badania mieszczące się w obrębie kierunku obok celów teoretycznych – poznanie natury uzdolnień matematycznych, mają wymiar głównie praktyczny, jakim jest stworzenie i stosowanie efektywnych metod nauczania oraz pomoc uczniowi we właściwym rozwoju i kształtowaniu swych uzdolnień. W obrębie kierunku mieści się większość badań psychologicznych i pedagogicznych z zakresu uzdolnień matematycznych. Badania te obejmują różne ujęcia problematyki takich uzdolnień. Badania zaprezentowane zostaną poniżej celem zobrazowania bogactwa możliwych podejmowanych tematów oraz próby ich systematyzacji.

W kontekście drugiego kierunku badań zagadnienie uzdolnień matematycznych rozpatrywać można od strony (1) treści analizowanych tematów oraz od strony (2) sposobu realizacji danego tematu.

Patrząc z perspektywy (1) treści analizowanych tematów można zauważyć, iż liczne opracowania koncentrują się przede wszystkim na poznawczym charakterze uzdolnień matematycznych. Dotyczy on ustalenia miejsca uzdolnień matematycznych w strukturze uzdolnień człowieka (Guilford 1978, Kość 1982, Hornowski 1986), sformułowania definicji (Krupa 1987), poznania kierunków badań (Dąbek 1984, Kotlarski 1990a), wyodrębnienia struktury i poszczególnych składników uzdolnień matematycznych (Krutiecki 1971, Jaśko 1992) oraz sposobów pomiaru uzdolnień matematycznych (Klakla 1982). Wymienione zagadnienia poznawczego charakteru uzdolnień matematycznych zostaną omówione w kolejnych częściach artykułu. W tym miejscu warto jednak przybliżyć historyczny rys wyodrębniania uzdolnień matema-

tycznych spośród grupy uzdolnień specjalnych, wchodzących w skład struktury zdolności człowieka. W hierarchicznych teoriach i modelach zdolności, uzdolnienia matematyczne stanowią jeden z komponentów ogólnej struktury zdolności umysłowych. W dwuczynnikowej, teorii inteligencji Spearmana (1927) zdolności matematyczne wchodzą w skład czynnika specyficznego (s), który podporządkowany jest czynnikowi ogólnemu (g). W koncepcji inteligencji Verona (1950) zdolności matematyczne zgrupowane są wokół liczbowego czynnika niższego rzędu, mającego bezpośrednie powiązanie z czynnikiem ogólnym (g), poprzez werbalno-szkolny czynnik wyższego rzędu. Istnienie czynnika matematycznego podkreślali również autorzy koncepcji czynników równorzędnych w określaniu struktury uzdolnień ludzkich. Thurstone (1938) na podstawie analizy czynnikowej wyodrębnił dwa czynniki, które leżą u podstaw zdolności matematycznych. Czynnik liczbowy określany, jako umiejętność wykonywania operacji arytmetycznych oraz czynnik przestrzenny, zdolność do przekształcania w wyobraźni figur i kształtów, a także spostrzegania układów przestrzennych. Zdolności matematyczne obecne są również w modelu intelektu Guilforda (1978) jako wynik przekształceń na materiale symbolicznym, za pomocą operacji umysłowej – myślenia dywergencyjnego (por. Guilford 1978, Hornowski 1986, Nęcka 2000, Strelau 2002). Zaprezentowany powyżej przegląd pozycji uzdolnień matematycznych w ogólnej strukturze uzdolnień człowieka pokazuje, iż są one ważnym składnikiem teorii i modeli zdolności. Tym samym stanowią podstawę opracowań na temat uzdolnień matematycznych i inspirację do innych badań nie tylko z perspektywy poznawczego charakteru uzdolnień matematycznych.

Inne podejście do charakterystyki uzdolnień matematycznych rozpatruje je w kontekście czynników wpływających na poziom uzdolnień matematycznych (Borzym 1983; Kotlarski 1990a, 1990b, 1991; Gruszczyk-Kolczyńska 1989). Uszczegółowieniem tego podejścia jest przedstawienie uzdolnień matematycznych, jako systemu funkcji symboliczno-komunikacyjnych. System ten umożliwia analizę rozwoju poziomu zdolności matematycznych w związku z procesami przyswajania systemu znaków oraz osiągania kolejnych etapów w rozwoju aktywności logiczno-matematycznej człowieka ze szczególnym uwzględnieniem teorii rozwoju poznawczego człowieka Piageta (Jaśko 1992).

Znaczące miejsce w opisie uzdolnień matematycznych zajmuje także analiza osobowościowych uwarunkowań poziomu funkcjonowania osób uzdolnionych matematycznie (Kennedy 1960, Vlalnovits 1999, Sękowski 2001).

Warto również wspomnieć o znacznej literaturze dotyczącej sposobów i form rozwoju kształcenia zarówno osób wybitnie uzdolnionych matematycznie (Nakoneczna 1980; Janowicz 1985; Jarosińska, Kąkol 1987; Webb, Lubinski, Benbow 2002), jak i przeciętnie uzdolnionych (Hawlicki 1971;

Stucki 1979a, 1979b) czy wymagających reedukacji w zakresie matematyki (Kość 1982, Burecka 1985, Gruszczyk-Kolczyńska 1989).

Natomiast rozpatrując problematykę uzdolnień matematycznych od strony (2) sposobu realizacji tematu można wyróżnić dwa podejścia. Pierwsze obejmuje samodzielne, wielowymiarowe, głównie psychologiczne, analizy dotyczące specyfiki uzdolnień matematycznych oraz osób uzdolnionych matematycznie (Kennedy 1960; Krutiecki 1971; Dąbek 1984; Kotlarski 1985, 1990a, 1995; Lubinski, Webb, Morelock, Benbow 2001). Natomiast drugie podejście związane jest z analizą porównawczą osób o zróżnicowanym zarówno poziomie jak i rodzaju uzdolnień matematycznych. Analiza porównawcza obejmuje:

- funkcjonowanie osób uzdolnionych matematycznie, osób uzdolnionych humanistycznie i muzycznie (Sękowski 2001), twórczo (Krupa 1986, 1987; Popek 1993);
- funkcjonowanie osób o zróżnicowanym poziomie uzdolnień matematycznych (Vlahovic, Stetic, Vidovic, Arambasic 1999);
- funkcjonowanie osób o zróżnicowanym typie uzdolnień matematycznych (Gawda 1996), w kontekście takich zmiennych psychologicznych, jak: poziom inteligencji ogólnej, wyobraźnia przestrzenna, twórczość, style poznawcze, preferencja wartości, samoocena, poziom lęku.

Przedstawiona powyżej próba uporządkowania różnorodnych aspektów badań uzdolnień matematycznych wskazuje – z jednej strony na bogactwo literatury przedmiotu dążącej do coraz pełniejszego poznania specyfiki uzdolnień oraz możliwości praktycznych zastosowań wyników badań – z drugiej strony stanowić może inspirację do badań własnych umiejscowionych w istniejącym lub nowym kontekście teoretycznym.

4. Struktura uzdolnień matematycznych

Niezbędnym czynnikiem warunkującym zrozumienie zdolności matematycznych jest poznanie ich wewnętrznej struktury. Przegląd badań pokazuje, że większość badaczy jest zdania, iż uzdolnienia matematyczne składają się z szeregu uzdolnień wzajemnie ze sobą powiązanych i tworzących określoną strukturę. Rose (1922) wyodrębnił dwa komponenty uzdolnień matematycznych: zdolność do pamiętania i rozumienia wzorów, twierdzeń i dowodów oraz umiejętność wykorzystania zdobytej wiedzy w trakcie rozwiązywania zadań. Canisia (1962) podaje kryteria występowania uzdolnień matematycznych. Zalicza do nich: umiejętność widzenia i odkrywania stosunków oraz sposobów ich łączenia, a także wyciągania wniosków; umiejętność wyprowadzania zależności; możliwość swobodnego posługiwania się poszczególnymi symbolami matematycznymi; łatwość dokonywania analizy zadania i plano-

wania kolejnych etapów prowadzących do jego rozwiązania. Na podstawie prac Barakat (1951), Vardelina (1958), Canisia (1962) wyróżnione zostały poszczególne czynniki wchodzące w skład zdolności matematycznych. Są to (za: Dąbek 1984, s. 22-24):

- ogólny czynnik matematyczny mający wpływ na powodzenie w rozwiązywaniu zadań;
- czynnik liczbowy będący wspólny podczas wykonywania operacji arytmetycznych;
- czynniki przestrzenne opierające się na umiejętności orientowania się w aktualnie postrzeganej przestrzeni;
- czynniki werbalne odnoszące się do zadań tekstowych;
- czynniki rozumowania;
- czynniki szkolne związane z osobowościowymi cechami jednostki.

Ważnym podsumowaniem prac powyższych autorów, jak podaje Kotlarski (1990a, 1995), jest wyodrębnienie w uzdolnieniach matematycznych podstawowych komponentów oraz ich składowych. Istnieją cztery komponenty: przestrzenny, logiczny, liczbowy i symboliczny. W komponencie przestrzennym zawierają się takie cechy, jak: zrozumienie figur przestrzennych, pamięć obrazów przestrzennych, abstrakcje przestrzenne oraz samodzielne odkrywanie związków i stosunków w obiektach przestrzennych. Komponent logiczny zawiera: przyswajanie pojęć matematycznych i abstrakcji pojęciowych, zrozumienie, zapamiętanie i samodzielne odkrywanie związków matematycznych, zrozumienie i samodzielne wydzielenie prawidłowości i dowodów według praw logiki formalnej. Komponent liczbowy składa się z: przyswajania stosunków liczbowych, pamięci liczb i liczbowych rozwiązań. Natomiast w skład komponentu symbolicznego wchodzi: zrozumienie i zapamiętanie symboli, a także dokonywanie operacji z ich udziałem.

Według Popka (1992) na strukturę uzdolnień matematycznych składają się cztery aktywności, które odpowiadają komponentowi przestrzennemu, logicznemu, liczbowemu oraz symbolicznemu. Do aktywności tych należy: dostrzeganie relacji i stosunków liczbowych oraz umiejętność dokonywania przekształceń w zbiorach; dostrzeganie i rozumienie obrazów i relacji przestrzennych; transformacje obrazów przestrzennych, abstrakcje przestrzenne, kombinatoryka, umiejętność formułowania strategii kombinatorycznych oraz dokonywanie działań i operacji arytmetycznych, operacje na symbolach liczbowych, pamięć liczb.

Swoiste podejście do problematyki zdolności matematycznych prezentuje Krutiecki (1971). Warto zauważyć, że ustalenia cytowanych wyżej autorów mają swój początek i bazę w ustaleniach badawczych Krutieckiego. Krutiecki swoją koncepcję struktury uzdolnień matematycznych podaje w odniesieniu przede wszystkim do uzdolnień matematycznych dzieci i młodzieży szkolnej. Wychodząc z analizy podstawowych etapów rozwiązania zadań matema-

tycznych badacz wyróżnia następujące składniki uzdolnień matematycznych (Krutiecki 1971, s. 257-258; Hornowski 1986, s. 154-155):

- odbieranie informacji matematycznych (zdolność do sformalizowanego postrzegania materiału matematycznego, zdolność do pojmowania struktury formalnej zadania);
- przetwarzanie informacji matematycznej (zdolność myślenia logicznego na materiale liczbowym, przestrzennym i symbolicznym; zdolność do szybkiego uogólniania tego materiału; giętkość procesów myślowych przy rozwiązywaniu zadań, dążenie do rozwiązań prostych, ekonomicznych i racjonalnych; zdolność do szybkiej i dowolnej zmiany kierunku myślenia i odwracania przebiegu rozumowania przy rozwiązywaniu);
- przechowywanie informacji matematycznej (pamięć matematyczna, czyli zapamiętywanie sposobów lub schematów rozwiązań);
- ogólny składnik syntetyczny (matematycznie ukierunkowany umysł – zamiłowanie do interpretowania otaczającego świata w kategoriach logicznych).

Przedstawiony wyżej schemat Krutieckiego ma duże znaczenie dydaktyczne. Według niego można korzystać z zadań testujących u dzieci i młodzieży szkolnej poziom zdolności matematycznych. Schemat jednak nie wyjaśnia genezy poszczególnych komponentów i ich dynamiki oraz zmienności. Niemniej jednak ważnym wnioskiem z badań Krutieckiego jest obserwacja, iż w zakresie poszczególnych komponentów uzdolnień matematycznych (zdolność do logicznego myślenia na materiale matematycznym, zdolność do uogólniania tego materiału, skracania procesu rozumowania, giętkości myślenia czy zdolność do zmiany kierunku myślenia), różnice pomiędzy uczniami uzdolnionymi matematycznie a nie uzdolnionymi w miarę rozwoju od młodszego do starszego wieku szkolnego i osiągania kolejnych szczebli edukacji coraz bardziej pogłębiają się na niekorzyść nieuzdolnionych matematycznie (Kotlarski 1990a). Tym samym, jak postuluje Hawlicki (1971) i Stucki (1979a, 1979b), bardzo ważne, możliwe i celowe jest rozwijanie podczas realizacji programu dydaktycznego poszczególnych komponentów wchodzących w skład zdolności matematycznych już od najmłodszych klas szkolnych.

Do omawianego kontekstu teoretycznego struktury uzdolnień matematycznych warto również dołączyć propozycje Jaśko (1992) wydzielenia w strukturze uzdolnień matematycznych specyficznego czynnika bądź grupy uzdolnień przyrodniczych odpowiedzialnych za dostrzeganie relacji, wnioskowanie i kategoryzowanie zjawisk przyrody.

5. Pomiar uzdolnień matematycznych

Analizując stan badań na temat pomiaru uzdolnień matematycznych łatwo zauważyć, iż dotyczy on w głównej mierze dzieci i młodzieży oraz szkolnych uzdolnień matematycznych. Ma to swój ważny wymiar praktyczny. Na poziomie szkolnym, istnienie różnic indywidualnych w zakresie opisywanych wyżej sprawności w zdolnościach matematycznych jest szybko i bardzo wyraźnie zauważalne głównie przez nauczycieli matematyki oraz rodziców. Tym samym pojawia się pytanie o właściwe kryterium identyfikujące matematycznie uzdolnionych uczniów (Klakła 1982). W tradycji psychologii spośród dwóch istniejących obecnie kryteriów identyfikacji osób zdolnych: psychologicznym i psychopedagogicznym (Sękowski 1998) we wskazaniu osób uzdolnionych matematycznie dominującym, zarówno w praktyce jak i w badaniach naukowych, jest kryterium psychopedagogiczne. Pozwala ono na podstawie oceny szkolnej z matematyki oraz osiągnięć w olimpiadach i konkursach matematycznych (Białecki 1978) na szybką klasyfikację uczniów pod względem zainteresowań, osiągnięć i poziomu zdolności matematycznych. Dodatkowym ułatwieniem dla badacza, na gruncie polskim, jest istnienie na poziomie ponadpodstawowego szczebla edukacji, klas realizujących rozszerzony program nauczania z matematyki, które przynajmniej z założenia, już skupiają uczniów zainteresowanych szczegółowym poznawaniem matematyki jako nauki. Do rzadkości należy stosowanie szkolnego testu osiągnięć matematycznych (Panek 1977), czy też specjalnie na potrzeby badań skonstruowanego standaryzowanego testu uzdolnień matematycznych (Kotlarski 1985, 1990a, 1995). Natomiast na gruncie badań zagranicznych zdecydowanie większą popularnością cieszą się standaryzowane testy uzdolnień matematycznych: *Progressive Achievement Test (PAT)* (Niederer, Irwin, Irwin, Reilly 2003) oraz głównie *Scholastic Aptitude Test – Mathematics (SAT–M)* (Kimball 1989; Lubinski, Webb, Morelock, Benbow 2001), bądź też stosowanie wieloetapowych procedur z łącznym wykorzystaniem zarówno ocen szkolnych, jak i wyników testów matematycznych oraz opinii nauczycieli czy oceny osobistej (Kennedy 1960). Warto również wspomnieć o tworzeniu testu matematycznych osiągnięć specjalnie na potrzeby badań, w tym badań międzykulturowych (Stigler, Lee, Luckner, Stevenson 1982). Zarówno na gruncie polskim, jak i zagranicznym testy uzdolnień matematycznych, dostosowane są do wiedzy i umiejętności matematycznych uczniów z określonego przedziału wiekowego i realizujących określony program nauczania matematyki. Testy zbudowane są z konkretnych zadań matematycznych bądź to opartych o składniki uzdolnień matematycznych wyróżnione przez Krutieckiego (por. Kotlarski 1985, 1990a, 1995; Niederer, Irwin, Irwin, Reilly 2003), bądź samo-

dzielnie konstruowanych przez autorów (Stigler, Lee, Lucker, Stevenson 1982).

Jak w swych badaniach zauważa Kotlarski (1990a) istnieje wysoka dodatnia korelacja ($r = 0,89$) między szkolną oceną z matematyki a wynikiem testu uzdolnień matematycznych wśród uczniów zidentyfikowanych jako uzdolnionych matematycznie na podstawie wyników testu. Co dowodzi, iż ocena szkolna z przedmiotu matematyka, a jednocześnie kryterium psychopedagogiczne, mimo dużego międzyszkolnego zróżnicowania zarówno, co do poziomu nauczania, jak i praktycznie stosowanych kryteriów ocen przez różnych nauczycieli, jest dobrym kryterium klasyfikacji uczniów uzdolnionych matematycznie. Natomiast sam nauczyciel nie tylko spełnia rolę w identyfikacji uzdolnień, ale też w ich rozwijaniu i kształtowaniu tych uzdolnień (Kotlarski 1990b). Jak wykazał zespół badawczy Hellera (Sękowski 2001) oceny nauczycieli są bardziej predyktywne dla przyszłych osiągnięć uczniów niż wyniki w testach mierzących inteligencję ogólną czy twórczość. Na szczególną uwagę zasługują także symptomy wskazujące na ponadprzeciętne uzdolnienia matematyczne u poszczególnych uczniów, a jednocześnie pomagające nauczycielom, rodzicom, pedagogom i psychologom w ich identyfikacji. Janowicz (1985) oraz Wrona (2004) do najważniejszych szkolnych oznak wybitnych zdolności matematycznych, wzbogacających sylwetkę ucznia uzdolnionego matematycznie i pozwalających mu w pełni prezentować i wykorzystywać swoje umiejętności zaliczają:

- wysoką aktywność poznawczą związaną z zadawaniem pytań matematycznych;
- nadprogramowe czytanie literatury popularno-naukowej w zakresie matematyki;
- łatwość generowania różnych sposobów rozwiązania danego zadania nawet, gdy istnieją algorytmiczne reguły rozwiązania;
- podawanie własnych, indywidualnych sposobów rozwiązania;
- samokontrolę w myśleniu, umiejętność krytycznego spojrzenia na problem i dostrzeganie błędów w jego rozwiązaniu oraz samodzielne ich poprawianie;
- twórcze wykorzystywanie wiedzy i umiejętności matematycznych w rozwiązywaniu sytuacji problemowych z życia codziennego;
- umiejętność uogólniania i szybkiego łączenia wiedzy z różnych dziedzin matematyki podczas rozwiązywania zadań;
- wysoką i trwałą motywację do dokonywania wymienionych wyżej czynności poznawczych.

Wymienione wyżej dyspozycje być może nie stanowią kompletu, ale w powiązaniu z otrzymywanymi ocenami i wynikami testów uzdolnień matematycznych, pozwalają przede wszystkim nauczycielom przedmiotu z dużym

prawdopodobieństwem stwierdzić, czy dany uczeń posiada umiejętności matematyczne i w znacznym stopniu pozwalają oszacować ich wielkość.

6. Czynniki warunkujące poziom zdolności matematycznych

W analizie literatury przedmiotu dotyczącej problematyki zdolności matematycznych ważne miejsce zajmują badania opisujące czynniki oddziałujące na poziom u uzdolnień matematycznych. Nabierają one szczególnego znaczenia zwłaszcza w kontekście płynących z nich wniosków dla psychologów, pedagogów i nauczycieli na codzień pracujących z dziećmi i młodzieżą szkolną o zróżnicowanym poziomie uzdolnień matematycznych. Czynniki te ważne są także z perspektywy teoretycznej, w aspekcie nowopowstałego działu psychologii – psychologia nauk ścisłych (*psychology of science*). Dział ten zajmuje się badaniem i poznaniem, które z czynników rozwojowych, cech osobowości i procesów poznawczych wpływają pośrednio i bezpośrednio korzystnie na rozwój zainteresowań, wzrost osiągnięć i twórczość na polu nauk ścisłych, a w tym i matematyki (Feist 2006a, 2006b).

Patrząc z perspektywy przeglądu badań dotyczących czynników warunkujących poziom uzdolnień matematycznych należy zaznaczyć różny wkład badaczy w rozwój wiedzy o tychże czynnikach. Przedstawiony poniżej przegląd wyników badań zawiera jednocześnie wnioski z badań nastawionych tylko na poznanie i zanalizowanie czynników warunkujących rozwój zdolności matematycznych (zob. Kennedy 1960; Hawlicki 1971; Kosć 1982; Gruszczyk-Kolczyńska 1989; Kotlarski 1990a, 1995) oraz wnioski na ten temat formułowane przy okazji innych badań. W przypadku kiedy autorzy problematykę czynników oddziałujących na poziom uzdolnień matematycznych włączają jedynie w krąg swych działań badawczych nie czyniąc z niej głównego pola swych rozważań (zob. Borzym 1983, Burecka 1985, Krupa 1987, Gawda 1996, Seligman 1997, Tyszkowa 1990).

Kotlarski (1990a) dzieli czynniki wpływające na poziom uzdolnień matematycznych na rozwojowe, dydaktyczne, intelektualne i pozaintelektualne.

Czynniki rozwojowe i dydaktyczne

Do czynników rozwojowych zaliczane są przede wszystkim kolejne etapy rozwoju poznawczego dziecka, a tym samym możliwe do wykonania procesy umysłowe w każdym z kolejnych piagetowskich stadiów rozwoju od przedoperacyjnego do abstrakcyjno-logicznego. Wśród czynników dydaktycznych wymienić należy: dostosowanie metod nauczania matematyki do poziomu rozwoju umysłowego dziecka; kształtowanie już od wieku przedszkolnego

prawidłowych pojęć matematycznych; problemowość jako cechę zadań matematycznych, motywującą do samodzielnego myślenia ucznia; właściwy dobór zadań dopasowany do wiedzy i umiejętności ucznia, a także odpowiednią postawę nauczyciela matematyki, pełną entuzjazmu i zaangażowania w nauczany przedmiot (Hawlicki 1971; Kotlarski 1990a, 1990b).

Czynniki intelektualne

Czynniki intelektualne związane są przede wszystkim z poziomem inteligencji ogólnej. Prace Białeckiego (1978), Borzym (1983) oraz Krupy (1987) wskazują, iż występuje wysoka, dodatnia korelacja między uzdolnieniami matematycznymi a inteligencją ogólną. Uzdolnienia matematyczne idą w parze z wysoką inteligencją ogólną. Uzdolnienia matematyczne mogą iść w parze także z innymi uzdolnieniami specjalnymi, jednakże inne uzdolnienia mogą istnieć bez uzdolnień matematycznych. Rozważając kwestie współwystępowania uzdolnień matematycznych z innymi zdolnościami warto zwrócić uwagę na problematykę zależności uzdolnień matematycznych i uzdolnień twórczych. Prace Krupy (1986, 1987) oraz Gawdy (1996) pokazują, iż nie ma jednoznacznie ujemnej i istotnej statystycznie zależności pomiędzy uzdolnieniami twórczymi a matematycznymi. Rozpatrując rodzaj uzdolnień matematycznych Gawda (1996) wykazała, iż im wyższy poziom uzdolnienia twórczego, tym wyższe uzdolnienie matematyczne typu heurystycznego. Wynik ten potwierdza praktyka oraz praca Hadamarda (1964), który w swym studium pisze, iż twórczość w dziedzinie matematyki jest zjawiskiem sporadycznym, zarezerwowanym tylko dla wybitnych jednostek. Na dowód czego warto przywołać postać i dorobek naukowy polskiego matematyka Stefana Banacha, twórcy analizy funkcjonalnej (Kozielecki 1999). Natomiast pomiędzy uzdolnieniami matematycznymi algorytmicznymi a uzdolnieniami twórczymi, występuje ujemna korelacja. Biorąc pod uwagę, iż uzdolnienia matematyczne na poziomie szkolnym są przede wszystkim algorytmiczne, badacze z reguły oddzielają uzdolnienia matematyczne od twórczych. Niemniej jednak postulują, aby stymulacja uzdolnień specjalnych szła w parze z rozwojem uzdolnień twórczych, tak, aby doprowadzić u ucznia zdolnego matematycznie do rozwoju samodzielnego i twórczego działania w danej dziedzinie (Krupa 1987).

Czynniki pozaintelektualne

Uzdolnienia twórcze można zaliczyć do pozaintelektualnych czynników oddziałujących na poziom uzdolnień matematycznych. Do tychże samych czynników należy również włączyć, jak podaje Gruszczyk-Kolczyńska (1989): deficyty parcjalne, szczególnie w percepcji słuchowej i wzrokowej, które w znacznym stopniu utrudniają uczniom przyswajanie symboliki matematycznej; nadpobudliwość psychoruchową związaną z dekoncentracją ucznia na lekcjach matematyki; bilans sukcesów i porażek w uczeniu się matematyki powiązany z budowaniem negatywnego lub pozytywnego obrazu siebie oraz dojrzałością emocjonalną i umiejętnością radzenia sobie z problemami. W kontekście pozaintelektualnych czynników oddziałujących na poziom uzdolnień matematycznych należy wspomnieć także o trudnościach w uczeniu się matematyki związanych z rodzajami zaburzeń matematycznych. Kość (1982) wymienia ich trzy rodzaje:

- kalkulastenia – opóźnienie w opanowaniu wiadomości i umiejętności z dziedziny matematyki przy przeciętnym poziomie zdolności matematycznych i poziomie inteligencji;
- dyskalkulia – różnorodne zaburzenia umiejętności matematycznych na tle organicznym, przy poziomie inteligencji pozostającym w normie;
- akalkulia – pełną utratę zdolności liczenia.

Wieloczynnikowe uwarunkowania trudności w uczeniu się matematyki wymagają zaangażowanej i niekiedy długotrwałej reedukacji (Burecka 1985).

Do pozaintelektualnych czynników odgrywających rolę w zdolnościach matematycznych należy również włączyć ważny, choć dyskusyjny – biologiczny czynnik uczestniczący w rozwoju zdolności matematycznych. Kotlarski (1995) pisze, iż biologiczne podstawy rozwoju zdolności matematycznych są podobne do biologicznych podstaw rozwoju inteligencji. Jednym z warunków sprawnego funkcjonowania intelektualnego jest zdrowy, nieuszkodzony mózg, jednakże trudno jest ustalić i wskazywać na lokalizację wybitnych zdolności w obszarze mózgu. Sprawne opracowywanie informacji matematycznej wymaga równoczesnej współpracy obu półkul mózgowych zarówno na płaszczyźnie całościowej, jak i analitycznej, przestrzennej i werbalnej. Osoby posiadające zdolności matematyczne mają obie półkule lepiej współpracujące z sobą w sposób symultaniczny. Jest to warunek konieczny, aby było możliwe natychmiastowe przekodowanie informacji algebraicznych w przestrzenne, przestrzennych w algebraiczne, konkretnych w abstrakcyjne. Tego typu rodzaj kodowania zachodzi podczas uczenia się matematyki i rozwiązywania problemów matematycznych. Tym samym patrząc od strony neurologicznej fenomen dużych zdolności matematycznych może właśnie polega

na sprawnej i szybkiej współpracy i wymianie informacji między półkulami mózgowymi (Kotlarski 1995).

Płeć a zdolności matematyczne

Omawiając problematykę pozaintelektualnych czynników wpływających na poziom uzdolnień matematycznych warto również rozważyć zagadnienie związku płci ze zdolnościami matematycznymi. Przegląd badań wskazuje na dwa oblicza wniosków płynących z analizy tego zagadnienia. Z jednej strony są one ważne od strony praktycznej, codziennej, szkolnej pracy z uczniami o różnym poziomie uzdolnień matematycznych. Z drugiej strony wymagają one wciąż teoretycznej dyskusji i formułowania ich w trybie przypuszczającym, otwartym na dalsze analizy.

Historia rozwoju matematyki jako nauki pokazuje, iż wybitnymi matematykami byli i są w większości mężczyźni (Davis, Hersh 1994; Sękowski 1996). Również przegląd badań opisujących szkolne zdolności matematyczne także wskazuje, iż nadreprezentację w populacji uzdolnionych matematycznie stanowią chłopcy (por. Kennedy 1960; Panek 1977; Nakonieczna 1980; Kotlarski 1985, 1990a, 1995; Benbow, Arjmand 1991). Jednak szczególne miejsce w psychologicznych badaniach różnic indywidualnych w zakresie uzdolnień matematycznych zajmują uzdolnione matematycznie kobiety oraz analizy, dlaczego pomimo zdolności nie zawsze odnoszą one sukcesy na polu nauk ścisłych (Ravenna 1971; Stipek, Gralinski 1991; Olszewska 1993; Seligman 1997; Tiedemanna 2000; Nosek, Banaji, Greenwald 2002; Stoeger 2004; Bedyńska, Dreszer 2005). W wyjaśnianiu istnienia różnic w zdolnościach matematycznych między płciami biorą głównie udział dwa stowiska: biologiczne i środowiskowe. Niektórzy badacze są skłoni przypisywać różnice w zdolnościach matematycznych również czynnikom emocjonalnym i motywacyjnym (por. Kotlarski 1991, 1995). Zwolennicy biologicznie zdeterminowanych różnic między płciami w poziomie uzdolnień matematycznych, a także stymulowania poziomu uzdolnień matematycznych przez zewnętrzną, biologiczną ingerencję odwołują się do argumentów dotyczących historii rozwoju gatunku ludzkiego, różnic w budowie i funkcjonowaniu mózgu między płciami oraz oddziaływaniu hormonów płciowych w okresie prenatalnym oraz okresie dojrzewania (Benbow 1988; Benbow, Lubinski 1993; Benbow, Lubinski, Shea, Eftekhari-Sanjani 2000). Natomiast badacze, którzy upatrują w zewnętrznym środowisku przyczyn istnienia różnic w zdolnościach matematycznych między płciami, za główny swój argument podają przede wszystkim efektywność kształcenia matematycznego ujętego w programach szkolnych (Walberg 1988 – za: Kotlarski 1991, 1995) oraz odmienne oddziaływania wychowawcze kierowane do obu płci (Crowley, Callanan,

Tenenbaum, Allen 2001). Efekty kształcenia matematycznego szczególnie są przywoływane w kontekście międzykulturowych porównań poziomu uzdolnień matematycznych. Badacze zwracają uwagę, iż w krajach gdzie wymagania programowe względem nauki matematyki są wysokie, przeciętnie uzdolnieni uczniowie osiągają o wiele lepsze wyniki w testach matematycznych niż uczniowie uznani za uzdolnionych w krajach o niższych wymaganiach programowych (Stigler, Lee, Luckner, Stevenson 1982; Miura 1987; Mayer, Tajika, Stanley 1991). Natomiast wyniki analiz Crowley, Callanan, Tenenbaum i Allen (2001) pokazują, iż już podczas okresu dzieciństwa mogą powstawać różnice między dziewczętami i chłopcami w zakresie zainteresowań naukami ścisłymi, co może bezpośrednio rzutować na naukę matematyki. Do tego stanu rzeczy przyczyniają się oddziaływania wychowawcze rodziców, którzy więcej, częściej i chętniej wyjaśniają zagadnienia z zakresu nauk ścisłych chłopcom niż dziewczynkom, zanim jeszcze dzieci pójdą do szkoły i same zapoznają się z tą tematyką. Z problematyką oddziaływań wychowawczych nierozzerwalnie wiążą się czynniki emocjonalne i motywacyjne wpływające z atrybucji (Stipek, Gralinski 1991; Seligman 1997) oraz nadbudowany nad nimi stereotypowe postrzeganie uzdolnień matematycznych i odnoszenia sukcesów w tej dziedzinie nauki (Tiedemanna 2000; Nosek, Banaji, Greenwald 2002; Bedyńska, Dreszer 2005). Badania Stipek, Gralinski (1991) oraz Seligmana (1997) dotyczące wyjaśniania przyczyn swojego niepowodzenia pokazują, iż dziewczęta częściej niż chłopcy tworzą negatywne postawy wobec matematyki, w skutek czego częściej niż chłopcy przeżywają lęk i zniechęcenie do nauki tego przedmiotu. Dziewczęta także, częściej niż chłopcy, swoje niskie osiągnięcia w matematyce przypisują brakowi lub niższymi zdolnościami matematycznym, jak również niechętnie szczycą się swoimi matematycznymi sukcesami, tłumacząc je przypadkiem, a nie rezultatem wyłożonej pracy i ćwiczeń. Jednocześnie nauczono je biernie poddawać się i zgadzać z tymi wyjaśnieniami. Tym samym traktują one źródło niepowodzeń w matematyce jako stałe, niezmiennie i skierowane do wewnątrz, a sukces jako przychodzący z zewnątrz i niezależny od nich. Natomiast chłopcy wierzą, że swe niepowodzenia z matematyki mogą pokonać dzięki wzmożonej pracy. Ponieważ sukces zależy tylko od nich samych i ich zdolności, a ewentualne niepowodzenie to tylko przypadek. Co ciekawe, według obserwacji zespołu badawczego Hellera (za: Sękowski 2001) trening reatrybucyjny, prowadzony dla dziewcząt mających niepowodzenia w nauce fizyki, dziale nauki pokrewnej matematyce, przyniósł oczekiwany skutek w postaci podniesienia poziomu osiągnięć z fizyki oraz zmianie spostrzegania przyczyn własnych sukcesów, jako zależnych od własnej pracy, a nie jako dzieła przypadku. Szczególne znaczenie w kwestii wyjaśniania własnych sukcesów matematycznych posiadają także istniejące negatywne stereotypy. Według Bedyńskiej i Dreszer (2005) stereotypy po części odpowiadają za niskie osiągnięcia szkolne osób,

mających wysoki poziom zdolności i wysokie osiągnięcia w dziedzinie, której stereotyp dotyczy, a zwłaszcza matematycznie uzdolnionych dziewcząt i kobiet. Analizy prowadzone przez Nosek, Banaji, Greenwald (2002) dotyczące różnic pomiędzy płciami w zakresie zainteresowania matematyką, osiągnięć i pozytywnej postawy wobec niej i innych nauk ścisłych, potwierdzają znaczący ujemny wpływ istniejących w społeczeństwie stereotypów, dotyczących płci i ról społecznych, na osiągnięcia matematyczne dziewcząt, nawet uzdolnionych matematycznie. Wyniki badań pokazują, iż dziewczęta częściej identyfikują się z negatywną postawą wobec matematyki, a z pozytywną wobec przedmiotów humanistycznych i artystycznych. Uzasadnieniem tego jest to, że panuje stereotyp, iż zdolności matematyczne przypisywane są częściej mężczyznom niż kobietom. Badania Tiedemanna (2000) wskazują na stereotypowe spostrzeganie przez nauczycieli przyczyn sukcesu i niepowodzeń w uczeniu się matematyki wśród dziewcząt i chłopców. Nauczyciele uważają, iż dziewczęta mają w porównaniu do chłopców więcej trudności w rozumieniu zagadnień matematycznych oraz wkładają mniej pracy i starań w uczenie się matematyki.

Nowe światło, zarówno na rozumienie osiągnięć matematycznych dziewcząt, jak i wyjaśnianie różnic pomiędzy płciami, co do poziomu osiągnięć w nauce matematyki, rzucają badania Kimballa (1989) oraz Pennera (2003). Kimball porównując style uczenia się matematyki wśród dziewcząt i chłopców zauważył, iż w zależności od sposobu sprawdzania wiedzy, osiągnięcia różnią się. Dziewczęta, wykorzystując częściej uczenie się „na pamięć”, uzyskują lepsze od chłopców wyniki podczas sprawdzianów klasowych, gdy odtwarzana jest wiedza w znanych i przewidywalnych zadaniach do rozwiązania. Natomiast chłopcy, preferując uczenie się ze zrozumieniem, otrzymują lepsze rezultaty podczas rozwiązywania zadań – problemów matematycznych w nowych sytuacjach stosowania poznanej wiedzy takich, jak zewnętrzne testy matematyczne. Penner (2003) przeprowadził międzynarodowe badania na temat wzajemnego wpływu trudności zadań testowych na ilość ich rozwiązań w zależności od płci. Badacz zauważył, iż w każdym z 10 państw, różnych części świata, różnice w wynikach testów uzdolnień matematycznych między chłopcami a dziewczętami można zaostrzać lub łagodzić poprzez stosowanie testów z zadaniami o różnym stopniu trudności. Przewaga chłopców nad dziewczętami w wynikach testów obrazujących uzdolnienia matematyczne rosła wraz z rosnącą trudnością zadań do rozwiązania.

Podsumowując przedstawione powyżej wyniki badań i rozważania na temat przyczyn zróżnicowanego poziomu zdolności matematycznych należy jeszcze raz podkreślić, iż większość badań w tym obszarze wymaga dalszych pogłębionych analiz i krytycznych omówień celem uniknięcia zbytnich uproszczeń i stereotypowych sformułowań. Niemniej jednak w powstawaniu różnic między płciami w zakresie poziomu uzdolnień matematycznych, ważną

rolę odgrywa zarówno czynnik biologiczny, jak i środowiskowy, ze szczególnym uwzględnieniem oddziaływań wychowawczych, sposobu wyjaśniania sukcesów, roli stereotypów i ról społecznych, jak też sposobu doboru poziomu trudności zadań do rozwiązania.

Kształtowanie karier edukacyjnych

W świetle analizy problematyki zróżnicowania poziomu zdolności matematycznych między płciami warto również przedstawić zagadnienie kształtowania się karier edukacyjnych uzdolnionych matematycznie jako jeden z pozaintelektualnych czynników wpływających na poziom uzdolnień matematycznych. Badania Kotlarskiego (1995) dotyczące karier edukacyjnych zdolnych i mniej zdolnych matematycznie uczniów pokazują, iż istnieją istotne statystycznie różnice zarówno, co do typu karier, ich jakości, poziomu formalizacji jak i efektywności uczenia matematyki po szkole podstawowej. Prawie wszyscy uczniowie uzdolnieni matematycznie podejmują naukę na poziomie szkoły średniej a następnie studia wyższe. Osiągają również wyższe wyniki w nauce w porównaniu ze swymi mniej zdolnymi rówieśnikami. Istnieje jednak zróżnicowanie między płciami, co do wyboru karier edukacyjnych związanych ściśle z matematyką i nie związanych z nią. Dziewczeta zdolne matematycznie planując swą dalszą karierę edukacyjną, znacznie rzadziej niż chłopcy wiążą ją z matematyką, a częściej decydują się na wybór przyrodniczo-biologicznych, a nawet humanistycznych czy artystycznych kierunków kształcenia. Istnienie tego stanu rzeczy potwierdzone jest w wielu badaniach (por. Tyszkowa 1990; Lubinski, Benbow 1992; Kotlarski 1995; Benbow, Lubinski, Shea, Eftekhari-Sanjani 2000; Lubinski, Benbow, Shea, Eftekhari-Sanjani, Halvorson 2001; Webb, Lubinski, Benbow 2002). Autorzy prac ów stan rzeczy wyjaśniają podobnie jak różnice między płciami w zakresie poziomu osiągnięć matematycznych. Z jednej strony akcentują przyczyny genetyczne (Benbow, Lubinski, Shea, Eftekhari-Sanjani 2000) z drugiej strony sądzą, iż o wyborze przez zdolne matematycznie dziewczeta karier nie związanych z matematyką decydują bardziej czynniki środowiskowe, naciski kulturowe i społeczne (Tyszkowa 1990; Benbow, Arjmand 1991) lub też podkreślają jednoczesny wpływ obu wymienionych czynników (Kotlarski 1995). Jednak, jak zauważają Webb, Lubinski i Benbow (2002), mimo, iż uzdolnione matematycznie kobiety częściej niż mężczyźni wybierają niematematyczne ścieżki kariery edukacyjnej, to ostatecznie na swej drodze zawodowej wykorzystują i powracają do swych matematycznych zainteresowań i uzdolnień.

Uzupełnieniem i rozszerzeniem charakterystyki czynników oddziałujących na uzdolnienia matematyczne jest kształtująca się dla przyszłych badaczy możliwość wpisanie ich we współczesne tendencje badań wybitnych zdol-

ności (Sękowski 2004). Tym samym ciekawe staje się poznanie relacji z inteligencją emocjonalną i społeczną, inteligencją sprzyjają sukcesowi życiowemu czy mądrością, stylami myślenia i uczenia się. Ważne staje się także, szczególnie w kontekście przyszłych karier edukacyjnych i zawodowych oraz poradnictwa zawodowego dla osób uzdolnionych matematycznie zanalizowanie poczucia satysfakcji z życia zawodowego, a także osobistego (Siekańska, Sękowski 2006).

7. Zakończenie

Podsumowując przegląd literatury przedmiotu dotyczącej rozważań na temat specyfiki uzdolnień matematycznych warto spojrzeć raz jeszcze na nie, ale w kontekście koncepcji i modeli wybitnych zdolności. Całokształt czynników oddziałujących na poziom uzdolnień matematycznych bardzo dobrze wpisuje się w wielowymiarowy model zdolności Mönksa, stanowiący rozwinięcie koncepcji zdolności Renzulliego. Autor ten wybitne zdolności identyfikuje, jako interakcje między trzema zespołami cech. Są to: ponadprzeciętne zdolności, zaangażowanie w pracę, twórczość. Mönks rozszerza ów model, wpisując interakcje wymienionych wyżej trzech czynników w uwarunkowania środowiska społecznego, wśród których najważniejsze znaczenie odgrywa szkoła, rówieśnicy i rodzina (por. Limont 1994, Sękowski 2001, Siekańska 2004). Ponadprzeciętne zdolności, rozumiane są w tym przypadku, jako zdolności specyficzne, wiążące się z konkretnym działaniem, którym są zdolności matematyczne oraz szereg komponentów wchodzących w skład ich struktury. Zaangażowanie w pracę związane jest z motywacją, objawiającą się wytrwałością, wytrzymałością, dążeniem do celu, a przede wszystkim zafascynowaniem swoją działalnością. Twórczość odnosi się i przejawia w płynności i oryginalności myślenia, ciekawości poznawczej, podawaniem nowych sposobów rozwiązań danych zadań, zamiłowaniem do harmonii i estetyki w rozwiązywaniu problemów matematycznych, co szczególnie widoczne jest w heurystycznym rodzaju uzdolnień matematycznych, a także w kierunku badań nad uzdolnieniami matematycznymi analizującym proces twórczy wybitnych matematyków. Kontekst środowiska społecznego obejmującego szkołę, rówieśników i rodzinę szczególnie uwidacznia się przy analizie problematyki pomiaru uzdolnień matematycznych, kształcenia osób uzdolnionych i kształtowania się ich karier oraz zagadnienia – płeć a zdolności matematyczne z uwzględnieniem oddziaływań wychowawczych rodziców i nauczycieli oraz roli stereotypów i ról społecznych.

BIBLIOGRAFIA

- Bedyńska S., Dreszer J. (2005). Stracone talenty. Negatywny stereotyp jako czynnik odpowiadający za niskie osiągnięcia szkolne uczniów zdolnych. W: W. Limont, J. Cieślukowska (red.), *Wybrane zagadnienia edukacji uczniów zdolnych. T. 1.* (s. 76-85). Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls”.
- Benbow C. P., Arjmand O. (1991) Educational Productivity Predictors Among Mathematically talented students. *Journals of Educational Research*, 84, 215-223.
- Benbow C. P. (1988). Sex differences in mathematical reasoning in ability in intellectually talented preadolescents: Their nature, effects, and possible causes. *Behavioral and Brain Science*, 11, 169-232.
- Benbow C. P., Lubinski D. (1993). Psychological profiles of the mathematically talented: Some sex differences and evidence supporting their biological basis. W: C. P. Benbow, D. Lubinski (red.), *The origins and development of high ability* (s. 44-66). Oxford: John Wiley & Sons.
- Benbow C. P., Lubinski D., Shea D. L., Eftekhari-Sanjani H. (2000). Sex differences in mathematical reasoning ability: Their status 20 years later. *Psychological Science*, 11, 474-480.
- Białycki I. (1978). Kształtowanie się wybitnych uzdolnień i metody selekcji uczniów wybitnie uzdolnionych a olimpiady matematyczne. W: L. Wołoszynowa (red.), *Materiały do nauczania psychologii. Seria II, T. 8.* (s. 287-332). Warszawa: PWN.
- Borzym I. (1983). Psychologiczne uwarunkowania powodzenia na studiach uniwersyteckich młodzieży różniące się poziomem i rodzajem zdolności. W: L. Wołoszynowa (red.), *Materiały do nauczania psychologii. Seria II, T. 10.* (s. 276-324). Warszawa: PWN.
- Burecka W. (1985). Próba reedukacji dziecka z trudnościami w matematyce. *Psychologia Wychowawcza*, 3, 287-292.
- Cewe A., Nahorska H., Pancer I. (2001). *Tablice matematyczne*. Gdańsk: Wydawnictwo Podkowa.
- Davis P. J., Hersh R. (1994). *Świat matematyki*. Warszawa: PWN.
- Dąbek A. (1984). *Psychologiczna analiza zdolności matematycznych. Struktura i kształcenie*. Zielona Góra: Wydawnictwo WSP.
- Feist G. J. (2006a). The past and future of psychology of science. *Review of General Psychology*, 10, 92-97.
- Feist G. J. (2006b). How development and personality influence scientific thought interest, and achievement. *Review of General Psychology*, 10, 163-182.

- Gawda B. (1996). Elementy postawy twórczej u młodzieży o zróżnicowanych uzdolnieniach matematycznych. W: S. Popek (red.), *Zdolności i uzdolnienia jako osobowościowe właściwości człowieka* (s. 101-111). Lublin: Wydawnictwo UMCS.
- Gruszczyk-Kolczyńska E. (1989). *Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki?* Warszawa: Instytut Wydawniczy Związków Zawodowych.
- Hadamard J. (1964). *Psychologia odkryć matematycznych*. Warszawa: PWN.
- Hawlicki J. (1971). *Rozwijanie uzdolnień matematycznych*. Warszawa: PZWS.
- Hornowski B. (1986). *Rozwój inteligencji i uzdolnień specjalnych*. Warszawa: WSiP.
- Janowicz J. (1985). *Kształcenie uczniów uzdolnionych matematycznie*. Wrocław: Instytut Kształcenia Nauczycieli.
- Jarosińska M., Kąkol H. (1987) Praca z młodzieżą uzdolnioną matematycznie na lekcjach matematyki. *Oświata i Wychowanie*, 22, 40-42.
- Jaśko M. P. (1992) Struktura zdolności matematyczno-przyrodniczych. W: A. Biela, Cz. Walesa (red.), *Problemy współczesnej psychologii. T. 1.* (s. 123-127) Lublin: Wydawnictwo Polskiego Towarzystwa Psychologicznego oddział w Lublinie.
- Kennedy W. A. (1960). A multidimensional study of mathematically gifted adolescents. *Child Development*, 31, 655-666.
- Kimball M. M. (1989). A new perspective on women's math achievement. *Psychological Bulletin*, 105, 198-214.
- Klakla M. (1982). Z badań nad rozpoznawaniem uzdolnień matematycznych. *Dydaktyka Matematyki*, 2, 33-81.
- Kline M. (1977). Podstawy matematyki. *Problemy*, 1, 46-58.
- Kość L. (1982). *Psychologia i psychopatologia zdolności matematycznych*. Warszawa: Wydawnictwo Radia i Telewizji.
- Kotlarski K. (1985). Uzdolnienia matematyczne a rozwiązywanie niematematycznych problemów konwergencyjnych. *Psychologia Wychowawcza*, 4, 411-419.
- Kotlarski K. (1990a). *Czynniki oddziałujące na poziom uzdolnień: na przykładzie uzdolnień matematycznych*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza.
- Kotlarski K. (1990b). Znaczenie nauczyciela w rozwijaniu uzdolnień matematycznych uczniów. W: W. Panek, K. Śmiało (red.), *Identyfikacja zdolnych i wczesna inicjacja pracy z nimi* (s. 141-151). Białystok: Dział Wydawnictw Filii UW w Białymstoku.
- Kotlarski K. (1991). Płeć a uzdolnienia matematyczne. *Kwartalnik Pedagogiczny*, 1, 94-107.
- Kotlarski K. (1995). *Kariery edukacyjne uczniów zdolnych i mniej zdolnych matematycznie*. Toruń: Wydawnictwo Uniwersytetu im. Mikołaja Kopernika.

- Koziński J. (1999). *Banach, geniusz ze Lwowa*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak”.
- Krupa W. (1986). Uzdolnienia matematyczno-fizyczne a uzdolnienia twórcze młodzieży licealnej. W: W. Panek (red.), *Formy i metody pracy z uczniem uzdolnionym i utalentowanym w domu i szkole* (s. 219-233). Białystok: Dział Wydawnictw Filii UW w Białymstoku.
- Krupa W. (1987). Zależność między uzdolnieniami matematycznymi a poziomem inteligencji i uzdolnieniami twórczymi młodzieży licealnej. W: S. Popek (red.), *Z badań nad zdolnościami i uzdolnieniami specjalnymi młodzieży* (s. 83-94). Lublin: Wydawnictwo UMCS.
- Krutiecki W. A. (1971). Zagadnienia ogólne dotyczące struktury zdolności matematycznych. W: J. Strelau (red.), *Zagadnienia psychologii różnic indywidualnych* (s. 257-276). Warszawa: PWN.
- Limont W. (1994). *Synektyka a zdolności twórcze*. Toruń: Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika.
- Lubinski D., Benbow C. P. (1992). Gender differences in abilities and preferences among the gifted: Implications for the math/science pipeline. *Current Directions in Psychological Science*, 1, 61-66.
- Lubinski D., Benbow C. P., Shea D. L., Eftekhari-Sanjani H., Halvorson M. B. J. (2001). Men and women at promise for scientific excellence: Similarity not dissimilarity. *Psychological Science*, 12, 309-317.
- Lubinski D., Webb R., Morelock M., Benbow C. P. (2001). Top 1 in 10 000: A 10-year follow-up of the profoundly gifted. *Journal of Applied Psychology*, 86, 718-729.
- Mayer R. E., Tajika H., Stanley C. (1991). Mathematical problem solving in Japan and the United States: A controlled comparison. *Journal of Educational Psychology*, 83, 69-72.
- Miura I. T. (1987). Mathematics achievement as a function of language. *Journal of Educational Psychology*, 79, 1, 79-82.
- Nakonieczna D. (1980). *Kształcenie wielostronne stymulujące rozwój uzdolnień*. Warszawa: WSiP.
- Nęcka E. (2000). Inteligencja. W: J. Strelau (red.), *Psychologia. Podręcznik akademicki. T. 2. Psychologia ogólna* (s. 721-760). Gdańsk: GWP.
- Nęcka E. (2002). *Psychologia twórczości*. Gdańsk: GWP.
- Nosal Cz. (1974). Rola zdolności poznawczych w procesie rozwiązywania problemów. *Studia Psychologiczne*, 13, 113-130.
- Nosek B. A., Banaji M. R., Greenwald A. G. (2002). Math = male, me = female, therefore math $\neq$ me. *Journal of Personality and Social Psychology*, 83, 44-59.
- Olszewska A. (1993). Psychologie in Erziehung und Unterricht. *Psychologia Wychowawcza*, 5, 449-453.

- Panek W. (1977). *Zachowanie się szczególnie zdolnych uczniów w sytuacjach szkolnych*. Białystok: Sekcja Wydawnicza Filii Uniwersytetu Warszawskiego w Białymstoku.
- Penner A. M. (2003). International gender $\times$ item difficulty interactions in mathematics and science achievement test. *Journal of Educational Psychology*, 95, 650-655.
- Popek S. (1992). Psychologiczne i społeczne uwarunkowania zdolności i uzdolnień specjalnych. W: A. Biela, Cz. Walesa (red.), *Problemy współczesnej psychologii. T. I.* (s. 97-105). Lublin: Wydawnictwo Polskiego Towarzystwa Psychologicznego oddział w Lublinie.
- Popek S. (1993). Z badań nad dynamiką systemu wartości młodzieży o zróżnicowanym poziomie zdolności i uzdolnień. *Lubelski Rocznik Pedagogiczny*, 15, 171-181.
- Ravenna H. (1971). Women mathematicians and the creative personality. *Journal of Consulting and Clinical Psychology*, 36, 210-220.
- Seligman M. E. (1997). *Optymistyczne dziecko*. Poznań: Media Rodzina of Poznań.
- Sękowski A. E. (1998). Wybrane różnice indywidualne a osiągnięcia uczniów zdolnych. *Przegląd Psychologiczny*, 41, 105-120.
- Sękowski A. E. (2001). *Osiągnięcia uczniów zdolnych*. Lublin: Towarzystwo Naukowe KUL.
- Sękowski A. E. (2004). Inteligencja, twórczość, mądrość a wybitne zdolności. W: A. E. Sękowski (red.), *Psychologia zdolności. Współczesne kierunki badań* (s. 173-192). Warszawa: PWN.
- Sękowski T. (1996). *Człowiek i matematyka*. Warszawa: Polska Oficyna Wydawnicza BGW.
- Siekańska M. (2004). Koncepcje zdolności a identyfikacja uczniów zdolnych. W: A. E. Sękowski (red.), *Psychologia zdolności. Współczesne kierunki badań* (s. 115-124). Warszawa: PWN.
- Siekańska M., Sękowski A. (2006). Job satisfaction and temperament structure of gifted people. *High Ability Studies*, 17, 75-85.
- Stigler J. W., Lee S., Lucker G. W., Stevenson H. W. (1982). Curriculum and achievement in mathematics: A study of elementary school children in Japan, Taiwan, and the United States. *Journal of Educational Psychology*, 74, 315-322.
- Stipek D. J., Gralinski J. H. (1991). Gender differences in children's achievement-related beliefs and emotional responses to success and failure in mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 83, 361-371.
- Stoeger H. (2004). Editorial: Gifted females in mathematics, the natural science and Technology. *High Ability Studies*, 15, 3-5.
- Strelau J. (2002). *Psychologia różnic indywidualnych*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR.

- Stucki E. (1979a). Przegląd badań nad rozwojem zdolności matematycznych w klasach młodszych. *Oświata i Wychowanie*, Wersja E, 11, 22-28.
- Stucki E. (1979b). Rozwijanie zdolności matematycznych w szkole. *Psychologia Wychowawcza*, 4, 481-494.
- Tiedemann J. (2000). Gender-related beliefs of teacher in elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 191-207.
- Tyszkowa M. (1990). *Zdolności, osobowość i działalność uczniów*. Warszawa: PWN.
- Vlahovic-Stetic V., Vidovic V., Arambasic L. (1999). Motivational characteristics in mathematical achievement: a study of gifted high-achieving, gifted underachieving and non-gifted pupils. *High Ability Studies*, 10, 37-49.
- Webb R. M., Lubinski D., Benbow C. P. (2002). Mathematically facile adolescents with math/science aspirations: New perspectives on their educational and vocational development. *Journal of Educational Psychology*, 94, 785-794.
- Wrona L. (2004). Uzdolnienia matematyczne. W: W. Pilecka, G. Rutkowska, L. Wrona (red.), *Podstawy psychologii – podręcznik dla studentów kierunków nauczycielskich* (s. 315-318). Kraków: Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej.

MATHEMATIC GIFTS – RESEARCH ANALYSIS

(Summary)

The aim of this article is to analyze and systematize the knowledge concerning mathematical gifts at the base of Polish and English literature published between 1960 and 2006. The multidimensional overviews of psychological literature were done to acquaint the readers with the complexity of the problem of mathematical talents and to present the achievements of the research in this field.

The discussion of mathematical gifts concerns definitions of the problem, the measurement methods and factors determining mathematical skills. The aspects mentioned above have been respectively discussed in the article. Multidimensional review of theoretical aspects allows to get acquainted with interesting and complex problem of mathematical skills. This article allows psychologists, educationalists and math teachers to use the results presented above in their work with mixed mathematical ability classes.

Korekta językowa – Katarzyna Ostrowska